УДК 517.929

# О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© **Е.И. Бравый**

*Ключевые слова*: функционально-дифференциальные уравнения; краевые задачи; периодическая краевая задача; задача Дирихле; условия однозначной разрешимости.

Для всех уравнений из семейств линейных функционально-дифференциальных уравнений второго порядка, заданных поточечными ограничениями на коэффициенты, получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи Дирихле и периодической краевой задачи.

Задача Дирихле и периодическая задача — краевые задачи, наиболее часто встречающиеся в приложениях функционально-дифференциальных уравнений. В последние годы условиям однозначной разрешимости этих задач посвящено множество работ, например, [1–7]. В части работ условия существования решения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений получены в случае, когда на функциональные отклонения аргумента (запаздывание или опережение) не накладывается никаких ограничений, иногда ограничения на отклонения аргумента являются ограничениями метода, а не постановки задачи. Оказывается, для линейных функционально-дифференциальных уравнений существуют достаточные условия существования решения, которые являются неулучшаемыми в следующем смысле: если эти условия не выполнены, то найдется такое отклонение аргумента, что краевая задача не имеет решения. Эти достаточные неулучшаемые условия могут быть сформулированы в виде необходимых и достаточных условий того, что краевая задача имеет решения для всех функционально-дифференциальных уравнений из заданного семейства уравнений. Для некоторых семейств уравнений, определяемых интегральными ограничениями на коэффициенты, такие необходимые и достаточные условия уже получены [3–7].

Здесь для семейств линейных функционально-дифференциальных уравнений второго порядка, определяемых поточечными ограничениями, будут найдены необходимые и достаточные условия разрешимости периодической краевой задачи и задачи Дирихле. Проверка этих условий заключается в решении задачи конечномерной оптимизации.

Мы рассматриваем задачу Дирихле

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = c_0, \quad x(1) = c_1, \end{cases} \tag{1}$$

и периодическую краевую задачу

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1), \end{cases} \tag{2}$$

где $T : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ — линейный ограниченный оператор, $f \in \mathbf{L}[0,1]$, $c_0$, $c_1 \in \mathbb{R}$, решение $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ задач (1) или (2) абсолютно непрерывно вместе со своей производной на отрезке $[0,1]$ (здесь пространства вещественных *непрерывных* и *суммируемых* функций на $[0,1]$ со стандартными нормами будем обозначать $\mathbf{C}[0,1]$ и $\mathbf{L}[0,1]$ соответственно). Оператор $T : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ называется положительным, если отображает неотрицательные функции в почти всюду неотрицательные.

Обозначим $G(t,s)$ функцию Грина двухточечной задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \end{array} \right.$$

определенную равенством

$$G(t,s) = \left\{ \begin{array}{ll} (t-1)s & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ (s-1)t & \text{при } 0 \leqslant t < s \leqslant 1. \end{array} \right.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть задана неотрицательная функция* $p \in \mathbf{L}[0,1]$ . *Задача Дирихле* (1) *является однозначно разрешимой при всех линейных положительных операторах* $T : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ , *удовлетворяющих условию*

$$(T\mathbf{1}\,)(t) = p, \quad t \in [0,1],$$

*тогда и только тогда, когда*

$$\min_{0 \leqslant t_1 \leqslant t_3 \leqslant t_2 \leqslant 1} \left| \begin{array}{cc} 1 - \int_{t_3}^1 G(t_1,s)p(s)\,ds & 1 - \int_0^1 G(t_1,s)p(s)\,ds \\ -\int_{t_3}^1 G(t_2,s)p(s)\,ds & 1 - \int_0^1 G(t_2,s)p(s)\,ds \end{array} \right| > 0.$$

Далее используем следующие обозначения: для любой функции $z \in \mathbf{L}[0,1]$

$$z^+(t) \equiv (z(t) + |z(t)|)/2, \quad z^-(t) \equiv (|z(t)| - z(t))/2,$$

для $t_1$ , $t_2 \in [a,b]$ и $z \in \mathbf{L}[0,1]$

$$g_{t_1,t_2}(s) \equiv G(t_2,s) - G(t_1,s), \quad s \in [0,1],$$

$$g_{t_1,t_2,z}(t) \equiv g_{t_1,t_2}(t) - \int_a^b z(s) g_{t_1,t_2}(s)\,ds, \quad t \in [0,1].$$

Т е о р е м а 2. *Пусть заданы неотрицательные функции* $p$ , $q \in \mathbf{L}[0,1]$ *и*

$$P \equiv \int_0^1 (p(s) - q(s)\,ds \neq 0.$$

*Периодическая задача* (2) *имеет единственное решение при всех таких линейных ограниченных операторах* $T : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ , *что*

$$T = T^+ - T^-, \quad T^+\mathbf{1}\, = p \quad , T^-\mathbf{1}\, = q,$$

*и линейные операторы* $T^+$ , $T^- : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ *положительны, тогда и только тогда, когда*

$$\max_{0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1} \int_0^1 \Big( p(t) g^+_{t_1,t_2,(p-q)/P}(t) + q(t) g^-_{t_1,t_2,(p-q)/P}(t) \Big)\, dt < 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mukhigulashvili S.* The Dirichlet boundary value problems for strongly singular higher-order nonlinear functional-differential equations // Czechoslovak Mathematical Journal. 2013. V. 63. № 1. P. 235–263.

2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений: Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

3. *Hakl R., Lomtatidze A., Půža B.* On periodic solutions of first order linear functional differential equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2002. Vol. 49. № 7. P. 929–945.

4. *Hakl R., Lomtatidze A., Šremr J.* Some boundary value problems for first order scalar functional differential equations. Brno: Masaryk University, 2002.
5. *Kiguradze I., Půža B.* Boundary value problems for systems of linear functional differential equations. Brno: Masaryk University, 2003.
6. *Бравый Е.И.* Разрешимость краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений. Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011.
7. *Бравый Е.И.* О разрешимости периодической краевой задачи для линейных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. № 4. С. 1029–1032.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (задание 2014/152, проект 1890) и поддержана РФФИ (проект 14–01–00338).

Поступила в редакцию 27 мая 2015 г.

Bravyi E.I. ON SOLVABILITY OF PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM AND DIRICHLET PROBLEM FOR SECOND ORDER FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS
The Dirichlet boundary value problem and the periodic boundary value problem for for some classes of linear second-order functional-differential equations are considered. Necessary and sufficient conditions of a unique solvability of the boundary value problem for all equations from these classes are obtained.
*Key words*: functional-differential equations; boundary value problems; periodic boundary value problem; solvability conditions; Dirichlet problem.

Бравый Евгений Ильич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: bravyi@perm.ru

Bravyi Evgenii Ilich, Perm National Research Polytechnical University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Research Center «Functional-Differential Equations», e-mail: bravyi@perm.ru

УДК 517.968.4

# ON CONNECTION BETWEEN CONTINUOUS AND DISCONTINUOUS HOMOGENIZED NEURAL FIELD EQUATIONS

© E. Burlakov, A. Ponosov, J. Wyller

*Key words*: discontinuous Hammerstein equations; solvability; continuous dependence.
We study existence and continuous dependence of the solutions to the Hammerstein equation under the transition from continuous nonlinearities in the Hammerstein operator to the Heaviside nonlinearity in a vicinity of the solution, corresponding to the discontinuous nonlinearity case.

We consider the following generalization of the homogenized Amari neural field equation (see for example [1], [2])

$$\partial_t u(t,x,x_{\mathrm{f}}) = -u(t,x,x_{\mathrm{f}}) + \int\limits_{\Xi}\int\limits_{\mathcal{Y}} \omega(x-y, x_{\mathrm{f}}-y_{\mathrm{f}}) f_\beta(u(t,y)) dy_{\mathrm{f}} dy, \tag{1}$$
$$t>0,\ x\in\Xi\subseteq R^m,\ x_{\mathrm{f}}\in\mathcal{Y}\subset R^k,$$